INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

Sesión 01/16

Repaso de Teoría de la Medida

Introducción

La teoría de la medida surgió de la teoría de integración; de manera más precisa, del "problema de la integral".

Bernhard Riemann, en un artículo titulado *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, el cual fue elaborado en 1854 pero publicado en 1867, cambió el enfoque para atacar el problema de la integración de funciones. Cauchy y quienes le siguieron buscaban extender la definición de la integral a funciones tan discontinuas como fuera posible, pero no partiendo de una definición general sino dando una definición distinta dependiendo del tipo de funciones que se querían integrar. En cambio, Riemann planteó una definición general de la integral para cualquier función y se abocó al problema de caracterizar a las funciones para las cuales esa integral está definida.

Planteaba Riemann:

¿Qué se debe entender por $\int_a^b f(x)dx$?

Consideremos una partición $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a,b]$ y definamos $\delta_k = x_k - x_{k-1}$. Si, independientemente de como se elijan las cantidades $\varepsilon_k \in [0,1]$, las sumas

$$\sum_{k=1}^n \delta_k f(x_{k-1} + \varepsilon_k \delta_k)$$

tienden a un límite cuando todas las cantidades δ_k tienden a cero, a ese límite se le llama el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

Definición 1. *Una función acotada $f : [a,b] \to R$ es Riemann-integrable si existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ de norma menor que δ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ξ_i es un número real cualquiera en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces:*

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$$

Decía Riemann:

"Busquemos ahora la extensión y el límite de la definición precedente y hagámonos esta pregunta: ¿En qué casos una función es susceptible de integración?, ¿en qué casos no lo es?"

Riemann demostró dos criterios para la integrabilidad de una función. Uno de ellos le permitió dar un ejemplo de una función integrable cuyo conjunto de discontinuidades es denso.

Un ejemplo similar al de Riemann, pero más fácil de tratar, es el siguiente:

Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{N} \text{ y primos entre sí} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. En efecto, la discontinuidad en un número racional x se sigue del hecho de que nos podemos acercar a x mediante números irracionales, en los cuales f toma el valor 0. Para demostrar la contuidad en un número irracional, primero observemos que dada $\varepsilon > 0$, únicamente existe un número finito de puntos x para los cuales se tiene $f(x) \geq \varepsilon$, de manera que si x_0 es un número irracional en el intervalo $[0,1]$, podemos tomar una vecindad de x_0 que no contenga a ninguno de los puntos en donde f es mayor o igual a ε. Para cualquier x en esa vecindad se tiene $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.

El conjunto de discontinuidades de f es denso, pero la función es integrable.

Sin embargo, durante varios años siguió prevaleciendo la búsqueda de la caracterización de las funciones integrables en base a la pequeñez topológica del conjunto de sus discontinuidades y, en esa búsqueda, se puede observar la confusión que existía respecto a los diferentes conceptos de pequeñez que podían definirse.

Alrededor del año 1873 tal confusión radicaba básicamente en la idea de que un conjunto es denso en ninguna parte si y sólo si es de primera especie.

Definición 2. *Se dice que un conjunto A de números reales es denso en ninguna parte si dado cualquier intervalo abierto no vacío I, existe un intervalo abierto no vacío J contenido en I tal que $J \subset A^c$. Esto es equivalente a decir que la cerradura de A no tiene puntos interiores, o bien que A no es denso en ningún intervalo abierto no vacío.*

Recordemos que si $A \subset \mathbb{R}$, se denota por $A^{(1)}$ al conjunto de puntos de acumulación de A, por $A^{(2)}$ al conjunto de puntos de acumulación de $A^{(1)}$, etc... Al conjunto $A^{(n)}$ se le llama el enésimo conjunto derivado de A.

Definición 3. *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es de primera especie si $A^{(n)}$ es finito para alguna n.*

En 1873 era ya bien conocido que un conjunto acotado de primera especie es denso en ninguna parte: en efecto, si un conjunto es denso en algún intervalo, entonces el conjunto de sus puntos de acumulación también lo es; de manera que ese conjunto no puede ser de primera especie.

Sin embargo, se pensaba que los conjuntos de primera especie agotaban las posibilidades de los conjuntos densos en ninguna parte. La confusión terminó cuando se inventaron métodos para construir conjuntos densos en ninguna parte.

Paul du Bois Reymond dio en 1883 un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte que no es de primera especie:

Sea I_n una sucesión de intervalos ajenos cuyos puntos extremos convergen al punto P.

En el interior de I_n definamos un conjunto Q_n de orden n y sea $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Q es un conjunto denso en ninguna parte pues cada conjunto Q_n lo es y éstos se encuentran en intervalos ajenos.

Por otra parte, $P \in Q^{(n)}$ para toda n, por lo tanto, Q no es de primera especie.

Otro método de construcción de conjuntos densos en ninguna parte fue desarrollado de manera independiente por Stephen Smith en 1875 , Vito Volterra en 1881 y Georg Cantor durante el periodo 1879-1884. Este método es el que se utiliza actualmente para definir el conjunto de Cantor, el cual es un ejemplo de un conjunto denso en ninguna parte que no es de primera especie.

Definamos:

$F_0 = [0, 1]$,

$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$,

$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$,

$\vdots$

En general, si ya tenemos definido el conjunto F_n, éste consta de una unión de 2^n intervalos cerrados ajenos. El conjunto F_{n+1} se construye entonces partiendo cada uno de esos intervalos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminando el intervalo central abierto.

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es llamado el conjunto de Cantor y tiene las siguientes propiedades:

- Es un conjunto denso en ninguna parte
- $F = F^{(n)}$ para toda n, por lo tanto, no es de primera especie.

Durante ese periodo emergió una nueva clase de conjuntos, los de contenido cero:

Definición 4. *Se dice que un conjunto tiene contenido cero si, para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe una familia finita de intervalos abiertos cuya unión cubre al conjunto y tales que la suma de sus longitudes es menor que* ε.

Se pudo demostrar además que esta nueva clase de conjuntos se ubica entre las otras dos que hemos mencionado, es decir, **todo conjunto acotado de primera especie tiene contenido cero y a su vez todo conjunto de contenido cero es denso en ninguna parte**.

Una demostración de la primera de estas contenciones puede basarse en el hecho de que si B es un conjunto acotado tal que el conjunto de sus puntos de acumulación tiene contenido cero entonces B también tiene contenido cero. En efecto, sea C el conjunto de puntos de acumulación de B; entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe una colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubre a C y tales que la suma de sus longitudes es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; el conjunto de puntos de B que no son cubiertos por la unión de esos intervalos es finito, pues si fuera infinito, siendo además acotado, tendría por lo menos un punto de acumulación, el cual obviamente no estaría en C, lo cual es una contradicción. Tal conjunto finito puede ser cubierto por una colección finita de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para demostrar la segunda contención, sea B un conjunto denso en algún intervalo $[a, b]$ con $a < b$; entonces, dada cualquier colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubra a B, redefínanse los intervalos de tal manera que se tengan intervalos ajenos con la misma unión; de esta forma resulta fácil mostrar que el conjunto de puntos del intervalo $[a, b]$ que no son cubiertos por la unión de esos intervalos es finito, pues de otra manera existiría un intervalo no vacío (c, d), contenido en $[a, b]$, el cual no tendría puntos en común con la unión de tales intervalos; pero, como B es denso en $[a, b]$, el intervalo (c, d) contendría puntos de B, lo cual es una contradicción. Se concluye entonces que dada cualquier colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubra a B, la suma de las longitudes de esos intervalos es mayor o igual a $b - a$, de manera que B no puede tener contenido cero.

El conjunto de Cantor, además de ser denso en ninguna parte, tiene contenido cero y, como ya se mencionó, no es de primera especie. Además, con el mismo método con el que se construye el conjunto de Cantor, se pudieron construir conjuntos compactos, densos en ninguna parte, que no son de primera especie y, además, que no tienen contenido cero. Por ejemplo, divídase el intervalo $[0, 1]$ en 3 intervalos de la misma longitud, elimínese el interior del subintervalo central y llámese F_1 a la unión de los subintervalos cerrados que restan; divídase cada uno de los 2 subintervalos que forman F_1 en 3^2 intervalos de la misma longitud, elimínese el interior del subintervalo central, llámese F_2 a la unión de los subintervalos cerrados que restan; júntese cada grupo de subintervalos contiguos en un solo intervalo, divídase cada uno de los 2^2 subintervalos que se forman en 3^3 intervalos de la misma longitud y elimínese el interior del subintervalo central; continuando con este proceso indefinidamente, la intersección F de los conjuntos $F_1, F_2, \ldots$ resulta ser un conjunto compacto, denso en ninguna parte y que no tiene contenido cero.

Para probar que F es denso en ninguna parte, obsérvese que cada uno de los 2^n intervalos ajenos que forman F_n tiene longitud igual a:

$\left(\frac{1}{3}\frac{3-1}{2}\right)\left(\frac{1}{3^2}\frac{3^2-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{3^n}\frac{3^n-1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{3-1}{3}\frac{3^2-1}{3^3}\cdots\frac{3^n-1}{3^n} < \frac{1}{2^n}.$

Supongamos que F es denso en algún intervalo (a,b) con $0 \leq a < b \leq 1$, entonces, como F es cerrado, se tiene $[a,b] \subset F$ y, por lo tanto, $[a,b] \subset F_n$ para cualquier n. Así que, como F_n es la unión de 2^n intervalos ajenos, se tiene $[a,b] \subset I$, donde I es alguno de los 2^n intervalos ajenos que componen F_n. De manera que $b - a \leq l(I) < \frac{1}{2^n}$. Como esto pasa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $b - a = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, F es denso en ninguna parte.

Ahora bien, al dividir cada uno de los 2^n intervalos ajenos que forman F_n en 3^{n+1} subintervalos de la misma longitud y eliminar el subintervalo central, la suma de las longitudes de los intervalos que se eliminan está dada por:

$2^n\frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1}{3}\frac{3-1}{2}\right)\left(\frac{1}{3^2}\frac{3^2-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{3^n}\frac{3^n-1}{2}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}\frac{3-1}{3}\frac{3^2-1}{3^3}\cdots\frac{3^n-1}{3^n} < \frac{1}{3^{n+1}}.$

De manera que si S es la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos ajenos que componen F^c, se tiene:

$S < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{2}.$

Sea $I_1, I_2, \ldots, I_n$ una colección finita de intervalos abiertos cuya unión cubre F, entonces esos intervalos, junto con los intervalos abiertos ajenos que componen F^c, forman una cubierta del intervalo $[0,1]$. Por lo tanto $S + \sum_{j=1}^{n} l(I_j) \geq 1$, así que:

$\sum_{j=1}^{n} l(I_j) \geq 1 - S > \frac{1}{2}.$

Se concluye entonces que F no puede tener contenido cero.

Una vez aclarada la confusión que existía entre las tres familias de conjuntos, se pudo concluir que **no es el tamaño topológico del conjunto de discontinuidades lo que determina que una función sea o no sea integrable**.

Fue también en ese momento cuando se pudo ya establecer con toda claridad la condición para que una función sea integrable. Axel Harnack demostró en 1881 el siguiente resultado:

Proposición 1. ***Una función es integrable si y sólo si, para cualquier $\sigma > 0$, el conjunto de puntos donde la oscilación de la función es mayor que σ tiene contenido cero.***

El concepto de contenido cero se convertiría desde ese momento en uno clave para la teoría de la integración y se tuvieron las bases para desarrollar una teoría del contenido, lo cual fue llevado a cabo por Otto Stolz, Axel Harnack, Giuseppe Peano y, sobre todo, por Camille Jordan. Todo esto durante el periodo que va de 1883 a 1892:

Las definiciones y propiedades se establecieron en ese periodo tanto para el caso de subconjuntos de los reales como para subconjuntos del plano, siendo similares en los dos casos. También surgieron en este periodo los conceptos de integral superior e inferior de una función, las cuales serán denotadas en lo que sigue por $\overline{\int}$ e $\underline{\int}$ respectivamente.

Definición 5. *Sea A un conjunto acotado de números reales y $[a, b]$ un intervalo que lo contenga. Para cada partición P del intervalo $[a, b]$ sea $\bar{S}(P, A)$ la suma de los subintervalos de P que contienen puntos de A y $\underline{S}(P, A)$ la suma de los subintervalos de P contenidos en A. Se define entonces el **contenido exterior** de A, $c_e(A)$, y el **contenido interior** de A, $c_i(A)$ mediante las relaciones:*

$$c_e(A) = \text{ínf}\left\{\bar{S}(P, A) : P \text{ es partición del intervalo } [a, b]\right\}.$$

$$c_i(A) = \sup\left\{\underline{S}(P, A) : P \text{ es partición del intervalo } [a, b]\right\}.$$

Se dice entonces que A es **Jordan-medible** si $c_e(A) = c_i(A)$ y, en este caso, a esta cantidad común se le llama el **contenido** de A y se le denota por $c(A)$.

Evidentemente todo conjunto de contenido cero es Jordan-medible. También todo intervalo acotado es Jordan-medible y su contenido es igual a su longitud.

Se observó también durante ese periodo que la teoría del contenido está íntimamente relacionada con la teoría de integración de Riemann, no únicamente porque la caracterización de la integrabilidad de una función se establece con base en el concepto de contenido cero. La relación resulta bastante más profunda, a tal grado que puede decirse que constituyen en realidad la misma teoría, formulada por un lado para los conjuntos y por el otro para las funciones. Por ejemplo, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 2. *Sea A un subconjunto del intervalo $[a, b]$ e I_A su función indicadora, entonces:*

$$\overline{\int_a^b} I_A(x)dx = c_e(A)$$

$$\underline{\int_a^b} I_A(x)dx = c_i(A)$$

Corolario 1. *A es Jordan-medible si y sólo si I_A es Riemann integrable. Además, en ese caso, se tiene:*

$$\int_a^b I_A(x)dx = c(A)$$

Proposición 3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada no negativa y E la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por el eje x y la gráfica de f entre a y b, entonces f es Riemann integrable si y sólo si E es Jordan medible. Además, en ese caso, se tiene:*

$$\int_a^b f(x)dx = c(E)$$

Años más tarde, en 1894-1895, Émile Borel, dio las bases para un nuevo avance al introducir el concepto de medida cero:

Definición 6. *Se dice que un conjunto tiene medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de intervalos abiertos $\{I_n\}$ cuya unión cubre al conjunto y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.*

Además de introducir el concepto de medida cero al resolver el problema que se planteó, la demostración de Borel contiene un resultado que sería clave para que más adelante Lebesgue pudiera definir el concepto de medida. Ese resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea I un intervalo cerrado y acotado y $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, entonces:

$$l(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j)$$

El resultado parece trivial ya que al evaluar la suma de las longitudes de los intervalos I_j, si dos de ellos se traslapan, podría haber una parte de I cuya longitud se está sumando dos veces; si no se traslapan, al sumar las longitudes de los dos intervalos, esa suma es por lo menos igual a la suma de las longitudes de las partes de I que se encuentran dentro de esos intervalos. Sin embargo, al tratar de formalizar esta idea se llega nuevamente al problema inicial.

Si el conjunto de intervalos abiertos cuya unión cubre I fuera finito, el resultado se puede demostrar fácilmente.

Para reducir el problema inicial al caso finito, Borel demostró que existe una colección finita de los intervalos I_j cuya unión también contiene a I.

La teoría de la medida de Lebesgue

El paso siguiente en el desarrollo de la Teoría de la Medida, así como el último hacia la caracterización de las funciones Riemann-integrables lo dió Henri Léon Lebesgue en 1902.

Lebesgue demostró el siguiente resultado:

Teorema 1. ***Una función acotada*** $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \mapsto \mathbb{R}$ ***es Riemann integrable si y sólo si el conjunto de puntos donde la función es discontinua tiene medida cero.***

Lebesgue desarrolló su teoría de la integral en su tesis doctoral titulada *Integrale, longueur, aire.* Más tarde la expuso en su libro *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.*

En ambos trabajos el problema que quería atacar Lebesgue era el del desarrollo de una función en serie trigonométrica, para lo cual se dio cuenta que las funciones integrables en el sentido de Riemann eran insuficientes para avanzar en ese problema.

Las funciones Riemann integrables no se comportan bien con el paso al límite.

Ejemplo:

Sea $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ el conjunto de los números racionales contenidos en un intervalo finito $[a, b]$, de longitud positiva y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la función $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definamos también $f\,[a, b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, r_2, r_3, \ldots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces se tiene lo siguiente:

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es Riemann-integrable y $\int_a^b f\,(x)\,dx = 0$.

2. $\lim_{n\to\infty} f_n\,(x) = f\,(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.

3. La función f no es Riemann-integrable.

Lebesgue requería de una definición de la integral de tal manera que las funciones integrables se comportaran bien con el paso al límite.

Se planteó entonces el encontrar una definición de la integral con mejores propiedades que la integral de Riemann. Se propuso así asignar a cualquier función acotada f, definida en un intervalo finito (a, b), un número real, denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$, al cual llamaba la integral de f en el intervalo (a, b). Planteó que esta integral debe tener las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $a, b, h \in \mathbb{R}$, se tiene:
   $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx$.
2. Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene:
3. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$.
4. $\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$.
5. Si f es no negativa y $a < b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es no negativa.
6. $\int_0^1 1dx = 1$.
7. Si una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y converge a la función f, entonces la sucesión de integrales $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

En seguida mostró Lebesgue que para dar una definición constructiva de la integral de cualquier función acotada, basta con hacerlo para las funciones que únicamente toman como valores 0 y 1 y, para una función f de este tipo, el problema de integración se traduce en asignar un número al conjunto de números reales $x \in (a, b)$ tales que $f(x) = 1$; de manera que entonces se planteó Lebesgue el **problema de la medida** de conjuntos, el cual consiste en asignar a cada conjunto acotado de números reales E, un número no negativo, $m(E)$, al cual llamaría la medida de E, debiéndose satisfacer las siguientes propiedades:

1. Si E es un conjunto acotado y $a \in \mathbb{R}$, entonces $m(E + a) = m(E)$.

2. Si $E_1, E_2, \ldots$ es una familia finita o infinita numerable de una sucesión de conjuntos, ajenos por parejas y contenidos en un conjunto acotado, entonces:

$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n)$$

3. $m([0, 1]) = 1$.

Aunque Lebesgue planteó el problema de asignar una medida a cualquier conjunto acotado de números reales, en realidad, como se ve más adelante en su razonamiento, lo que hizo fue encontrar una familia de conjuntos acotados de números reales a los cuales se les pueda asignar una medida de tal forma que se satisfagan las 3 propiedades mencionadas. Para esto, suponiendo que E es un elemento de esa familia, analizó las condiciones que debe satisfacer la medida de E para que se satisfagan las 3 propiedades; más aún, lo que hace es encontrar los conjuntos E para los cuales su medida queda únicamente determinada por esas 3 propiedades. Pero, para lograr esto, lo que hizo Lebesgue fue iniciar su razonamiento asumiendo que el problema de la medida tiene solución, es decir que se puede asignar una medida no negativa a cada subconjunto acotado de números reales. Después restringirá la familia de conjuntos medibles a aquellos cuya medida se pueda determinar de manera única. Luego de hacer esto viene el proceso inverso: partir de una definición de conjunto medible, al cual le asocia una medida, y mostrar que la familia de conjuntos así definida satisface las 3 propiedades que enunció.

Las condiciones sobre la medida implican que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $m(\{x\}) = 0$.

También, la medida de un intervalo acotado $[a, b]$ debe de ser igual a su longitud.

Para definir la medida de cualquier conjunto acotado, Lebesgue hizo el siguiente razonamiento:

Si E es un conjunto acotado e $I_1, I_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de intervalos, ajenos por parejas, tales que $E \subset \cup_n I_n$, entonces se debe de tener $m(E) \leq \sum_n l(I_n)$; definió entonces la **medida exterior** de E, $m_e(E)$, como el ínfimo de esas sumas, es decir:

$$m_e(E) = \text{ínf}\left\{\sum_n l(I_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ son intervalos ajenos por parejas y } E \subset \bigcup_n I_n\right\}$$

Ahora bien, como se tiene que $m([a, b]) = m(E) + m([a, b] - E)$, entonces:

$$m(E) = m([a, b]) - m([a, b] - E) \geq m([a, b]) - m_e([a, b] - E) = l([a, b]) - m_e([a, b] - E).$$

Se sigue que la cantidad:

$$l([a, b]) - m_e([a, b] - E)$$

es una cota inferior para la medida de E, la cual define como la **medida interior** de E y la denota por $m_i(E)$.

Como ya lo mencionamos, Lebesgue hizo lo anterior asumiendo que es posible asignarle una medida a todo conjunto acotado E, sin embargo las definiciones de medida exterior e interior son independientes de esta consideración y pueden darse para cualquier conjunto. Mostró entonces que se tienen las siguientes relaciones para cualquier conjunto acotado E:

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E)$$

Además, como se mostró arriba, de ser posible asignar una medida $m(E)$ al conjunto E, se debe de tener $m_i(E) \leq m(E) \leq m_e(E)$. Por lo tanto, la medida asignada a E será única cuando sus medidas interior y exterior coincidan. De aquí que Lebesgue estableció la siguiente definición:

Definición 7. *Se dice que un conjunto acotado E es medible si $m_i(E) = m_e(E)$.*

Aclaraba Lebesgue que es únicamente para estos conjuntos que se estudiará el problema de la medida, aclarando no saber siquiera si existen conjuntos que no sean medibles. Pero si existen tales conjuntos, decía que el desarrollo posterior que él hace no es suficiente para afirmar ni que el problema de la medida es posible ni que es imposible para tales conjuntos.

Mostró Lebesgue que se tiene la siguiente propiedad:

Si $E_1, E_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de conjuntos medibles, entonces la unión de ellos, así como su intersección, es medible.

Además demostró que la familia de los conjuntos medibles satisface las 3 condiciones que planteó para la medida de los conjuntos y demostró también que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles, entonces:

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \text{lím}_{n\to\infty}\, m\left(E_n\right)$$

Finalmente observó Lebesgue que, debido a la relación:

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E)$$

cualquier conjunto Jordan medible es también Lebesgue medible y, dado que los intervalos son medibles y la familia de conjuntos medibles tiene las propiedades enunciadas arriba, todo conjunto medible de acuerdo a la definición de Borel es también Lebesgue medible. De esta forma la teoría de la medida de Lebesgue resulta más general tanto que la de Jordan como de la de Borel y las engloba a ambas.

Años más tarde, en 1914, Constantin Carathéodory expresó la condición de medibilidad de un conjunto sin introducir el concepto de medida interior. De acuerdo con la definición de Carathéodory y restringiéndonos a los conjuntos acotados, como hace Lebesgue, un conjunto acotado de números reales E es medible si y sólo si se tiene:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

para cualquier conjunto acotado de números reales A.

Se puede demostrar que, para el caso de la medida de Lebesgue, el criterio de medibilidad de Lebesgue y el de Carathéodory son equivalentes.

Después del trabajo de Lebesgue, se continuó la investigación en la misma línea hasta culminar, en el año 1930, con la formulación de la teoría de la medida que hoy conocemos.

En esta forma final, ya sistematizada, es relativamente simple, se parte de poco y se llega a mucho.

Teoría general de la medida

Un espacio medible es una pareja $(\mathbb{F}, \Im)$, donde $\mathbb{F}$ es un conjunto cualquiera y $\Im$ es una σ-álgebra de subconjuntos $\mathbb{F}$; es decir, una familia de conjuntos que contiene a $\mathbb{F}$ y es cerrada bajo complementos y uniones infinitas numerables.

Un espacio de medida es una terna $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$, donde $(\mathbb{F}, \Im)$ es un espacio medible y μ es una función definida sobre $\Im$, la cual satisface las siguientes dos propiedades:

i. $\mu(\emptyset) = 0$.

ii. μ es σ-aditiva; es decir, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\Im$, ajenos por parejas, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Una función μ de este tipo es llamada una medida.

Se dice que un espacio de medida $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ es completo si $\Im$ contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de medida cero.

Todo espacio de medida se puede completar.

Cuando se tiene un espacio medible $(\mathbb{F}, \Im)$, una función $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$, donde $\overline{\mathbb{R}}$ es el conjunto de los números reales extendidos (es decir, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$), es llamada medible si $f^{-1}([-\infty, x]) \in \Im$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

La σ-álgebra generada por los subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ de la forma $[-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$, es llamada la σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$ y se le denota por $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

La condición de medibilidad de una función $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ implica que $f^{-1}(B) \in \Im$, para cualquier $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Esto es fácil de demostrar ya que la familia $H = \left\{B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) : f^{-1}(B) \in \Im\right\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$, la cual contiene a los generadores de $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$; así que $H = \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Comentario:

La definición de función medible, así como la definición de Lebesgue de la integral, tuvo su motivación directa en la relación que existe entre la integral de Riemann y la teoría del contenido.

Cabe aclarar que, además de definir una medida en $\mathbb{R}$, como una extensión del concepto de longitud, Lebesgue definió tambien una medida en R^2, como una extensión del concepto de área.

Por otra parte, recordando que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada no negativa y E la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por el eje x y la gráfica de f entre a y b, entonces f es Riemann integrable si y sólo si E es Jordan medible y, en ese caso, se tiene $\int_a^b f(x)dx = c(E)$. Lebesgue observó que cuando el conjunto E es (Lebesgue) medible se puede definir la integral de f como $\int_a^b f(x)dx = m(E)$. Automáticamente, esta definición resulta ser una extensión de la integral de Riemann pues si E es Jordan medible también es Lebesgue medible, pero hay conjuntos Lebesgue medibles que no son Jordan medibles. Una vez formulada esta definición geométrica de la integral, Lebesgue se planteó el problema de caracterizar a las funciones integrables y de llegar a la definición de la integral por la vía analítica. El primer problema lo resolvió demostrando el siguiente resultado:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada no negativa, entonces el conjunto

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \text{ y } y \in [0, f(x)]\}$

es medible si y sólo si el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

De aquí que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, la defina como medible si el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

Una vez que se tiene un espacio de medida $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$, se define la integral, con respecto a μ, de cualquier función medible no negativa mediante un proceso de extensión. Primero se define para las llamadas funciones medibles simples no negativas y después para cualquier función medible no negativa.

Se dice que una función medible φ es simple si tiene la forma siguiente:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} b_k I_{F_k}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n$ son números reales y $F_1, \ldots, F_n$ son elementos de $\Im$.

Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} b_k I_{F_k}$ es una función medible simple, se define su integral sobre $\mathbb{F}$, con respecto a μ, $\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu$, de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu\left(F_k\right)$$

La integral $\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu$ está bien definida, ya que, si $\varphi = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{E_k}$ es otra manera en que se puede expresar φ, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \mu\left(E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu\left(F_k\right)$$

Si f es cualquier función medible no negativa, se define su integral sobre $\mathbb{F}$, con respecto a μ, $\int_{\mathbb{F}} f d\mu$, de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{F}} f d\mu = \sup\left\{\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es medible simple y } 0 \leq \varphi \leq f\ \right\}$$

Si $F \in \Im$ y f es una función medible no negativa, se define su integral sobre F, con respecto a μ, $\int_F f d\mu$, de la siguiente manera:

$$\int_F f d\mu = \int_{\mathbb{F}} \left(I_F \cdot f\right) d\mu$$

Si f es cualquier función medible, se dice que f es integrable sobre un conjunto $F \in \mathbb{F}$ si $\int_F |f|\, d\mu < \infty$.

Si f es una función medible e integrable sobre un conjunto $F \in \mathbb{F}$, se define su integral sobre F, $\int_F f d\mu$, de la siguiente manera:

$$\int_F f d\mu = \int_F f^+ d\mu - \int_F f^- d\mu$$

donde f^+ y f^-, son la parte positiva y negativa de f, respectivamente.

Esto es lo básico de la teoría de la medida; después viene lo mucho que se puede hacer con esto y algunas otras definiciones importantes.

Un resultado central, debido a Lebesgue, es el que afirma que **toda función medible no negativa es el límite puntual de una sucesión no decreciente de funciones medibles simples**. Por su importancia, va la demostración:

Teorema 2. *Sea* $(\mathbb{F}, \Im)$ *un espacio medible y* $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones medibles simples no negativas* $\varphi_n : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tales que* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$ *para cualquier* $y \in \mathbb{F}$.

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} \frac{m-1}{2^n} & \text{si } \frac{m-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{m}{2^n} \text{ y } m \in \{1, 2, \ldots, n2^n\} \\ n & \text{si } f(y) \geq n \end{cases}$$

Comentario:

La demostración de Lebesgue del resultado enunciado es la base de su definición de la integral.

Recordemos que para definir la integral de Riemann de una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se consideran particiones del intervalo $[a, b]$.

Para definir la integral, Lebesgue siguió un camino similar, pero no considerando particiones del intervalo $[a, b]$, sino particiones en el contradominio de la función (el eje y); esto por la condición de medibilidad de una función: Si se quiere definir la integral de Lebesgue de una función medible $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tenemos que considerar como dominio el espacio medible $([a, b], \mathcal{L}([a, b]))$; de esta forma, f es medible si y sólo si $f^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{L}([a, b])$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

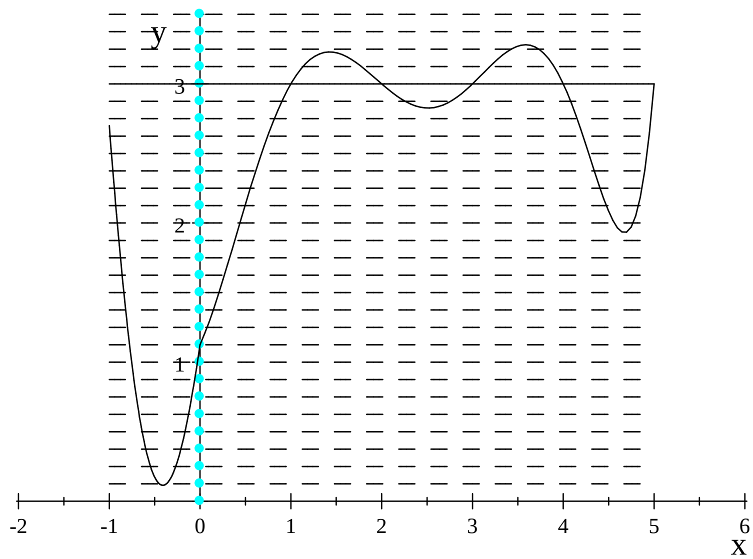
Entonces lo que hizo Lebesgue, para el caso de una función medible no negativa, fue considerar los racionales diádicos en el eje y; es decir, los números racionales, en el eje y, de la forma $\frac{k}{2^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Se sabe que este conjunto es denso en $\mathbb{R}$.

Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideró, sobre el eje y, los intervalos siguientes:

$$\left[0, \tfrac{1}{2^n}\right), \left[\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{2}{2^n}\right), \left[\tfrac{2}{2^n}, \tfrac{3}{2^n}\right), \left[\tfrac{3}{2^n}, \tfrac{4}{2^n}\right), \cdots$$

Por la medibilidad de f, la imagen inversa, bajo f, de cada uno de esos intervalos es un conjunto Lebesgue medible. De manera que, si consideramos únicamentre los primeros $n2^n$ de esos intervalos, obtenemos una partición del intervalo $[a, b]$ en $n2^n$ conjuntos Lebesgue medibles.

Por ejemplo, en la siguiente figura, para $n = 3$,el eje y se parte en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^3}$. De manera que, al tomar únicamente los primeros 24 de esos intervalos, obtenemos una partición del intervalo $[-1, 5]$ en 24 conjuntos Lebesgue medibles.



Continúa la demostración:

Si $y \in \mathbb{F}$ es tal que $f(y) = \infty$, entonces $\varphi_n(y) = n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \infty = f(y)$$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $y \in \mathbb{F}$ es tal que $f(y) < n$, sea m el único número natural tal que $\frac{m-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{m}{2^n}$. Entonces, como $\varphi_n(y) = \frac{m-1}{2^n}$, se tiene:

$$f(y) - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(y) \leq f(y)$$

Así que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$.

Ahora bien, como $\frac{2(m-1)}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m}{2^{n+1}}$, se tiene que, o bien $\frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}$ o bien $\frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq f(y) < \frac{2m}{2^{n+1}}$.

En el primer caso, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(y) = \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} = \varphi_n(y)$$

En el segundo, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(y) = \frac{2m-1}{2^{n+1}} > \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \varphi_n(y)$$

Así que, en cualquier caso, $\varphi_n(y) \leq \varphi_{n+1}(y)$.

Así que, φ_n es una sucesión no decreciente de funciones medibles simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$ para cualquier $y \in \mathbb{F}$.

Propiedades de las medidas

1. Si $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ es un espacio de medida, entonces:

a) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión $(A_n)_{n\in N}$ de elementos de $\Im$. (σ-subaditividad)

b) Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$, se tiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

c) Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\Im$ tales que $\mu(A_N) < \infty$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2. **Teorema de extensión de Carathéodory**: Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ una función finitamente aditiva y tal que $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ para cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$. Entonces existe una medida $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tal que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$, donde $\Im$ es una σ-álgebra que contiene a $\sigma(\mathcal{A})$.

3. Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$ para cualquier sucesión $(A_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas y tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

b) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión $(A_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

c) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

d) $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

e) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Otro resultado básico es el que afirma que **dada una función no decreciente y continua por la derecha,** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, existe una única medida** μ_F**, definida sobre los conjuntos borelianos de** $\mathbb{R}$**, tal que** $\mu_F\left((a,b]\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ **para cualquier pareja de números reales** a,b **tales que** $a<b$. Esa medida es finita sobre los conjuntos compactos.

Inversamente, **si** μ **es una medida definida sobre los conjuntos borelianos de** $\mathbb{R}$ **y finita sobre los conjuntos compactos, entonces existe una función** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**, no decreciente y continua por la derecha, tal que** $\mu_F=\mu$ **sobre los conjuntos borelianos de** $\mathbb{R}$. Si $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es otra función con la misma propiedad, entonces $F-G$ es constante.

A continuación se demuestran esos dos resultados:

Sea $F:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ una función no decreciente y continua por la derecha y definamos:

$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)$

$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$

Si $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ y $a<b$, definamos $(a,b|$ de la siguiente manera:

$$(a,b|=\begin{cases}(a,b] & \text{si } b\in\mathbb{R}\\ (a,b) & \text{si } b=\infty\end{cases}$$

Sea $\mathcal{I}$ la familia de los intervalos de este tipo, agregando al vacío como parte de la familia.

Definamos $\nu_F\left(\emptyset\right)=0$ y, para cada intervalo $I=(a,b|\in\mathcal{I}$, $\nu_F\left(I\right)=F(b)-F(a)$.

Se podría tener $F(\infty)=\infty$ y $F(-\infty)=-\infty$, lo cual no sería problema para la definición de $\nu_F\left((-\infty,\infty)\right)$ pues se tendría $\mu_F\left((-\infty,\infty)\right)=\infty-(-\infty)=\infty+\infty=\infty$.

Vamos a mostrar que ν_F se puede extender para obtener una medida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. **El resultado central que se requiere demostrar para hacer esto es el siguiente**:

Sea $(a,b|\in\mathcal{I}$ y $(a_1,b_1|,(a_2,b_2|,\ldots$ una colección infinita de intervalos en $\mathcal{I}$ tales que $(a,b|\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k|$. Entonces:

$$F(b)-F(a)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F(b_k)-F(a_k)\right]$$

Lema 1. *Sea* $I=(a,b|\in\mathcal{I}$ *y* $\left(a^{(1)},b^{(1)}\right|,\left(a^{(2)},b^{(2)}\right|,\ldots,\left(a^{(m)},b^{(m)}\right|$*, una colección finita de intervalos en* $\mathcal{I}$*, ajenos por parejas, tal que* $I=\bigcup_{j=1}^{m}\left(a^{(j)},b^{(j)}\right|$*, entonces:*

$$\nu_F\left(I\right)=\sum_{j=1}^{m}\nu_F\left(\left(a^{(j)},b^{(j)}\right|\right)$$

Lema 2. *Sea* $I = (a, b| \in \mathcal{I}$ *y* $I^{(1)} = \left(a^{(1)}, b^{(1)}\right|, \ldots, I^{(m)} = \left(a^{(m)}, b^{(m)}\right|$ *una colección finita de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$*, entonces:*

$$\nu_F(I) \leq \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(I^{(j)}\right)$$

Lema 3. *Sean* $I_1, \ldots, I_k$ *y* $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ *dos colecciones finitas de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $I_1, \ldots, I_k$ *son ajenos por parejas,* $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ *son ajenos por parejas y* $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$*, entonces:*

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_F(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \nu_F\left(I^{(j)}\right)$$

Teorema 3. *Sea* $(a, b| \in \mathcal{I}$ *y* $(a_1, b_1|, (a_2, b_2|, \ldots$ *una colección infinita de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $(a, b| \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k|$*. Entonces:*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

Demostración

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, arbitrarios.

Como F es continua por la derecha, para cada cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k > 0$ tal que:

$$F(d_k) - F(b_k) < \tfrac{\varepsilon}{2^k},$$

donde:

$$d_k = \begin{cases} b_k + \delta_k & \text{si } b_k \in \mathbb{R} \\ b_k & \text{si } b_k = \infty \end{cases}$$

Definamos:

$$c_\delta = \begin{cases} a + \delta & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\delta} & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

$$d_\delta = \begin{cases} b & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Entonces:

$$\text{lím}_{\delta \to 0} [F(d_\delta) - F(c_\delta)] = F(b) - F(a)$$

Además:

$$(c_\delta, d_\delta| \subset [c_\delta, d_\delta] \subset (a, b| \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k| \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, d_k)$$

Así que, por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $(a_{k_1}, d_{k_1}), \ldots, (a_{k_m}, d_{k_m})$, tal que:

$$[c_\delta, d_\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right)$$

Por lo tanto:

$$(c_\delta, d_\delta] \subset [c_\delta, d_\delta] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(a_{k_j}, d_{k_j}\right]$$

Así que:

$F(d_\delta) - F(c_\delta) \leq \sum_{j=1}^{m} \left[F\left(d_{k_j}\right) - F\left(a_{k_j}\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(d_k) - F(a_k)]$

$\leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)] + \varepsilon$

Y, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria:

$$F(d_\delta) - F(c_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

Finalmente, tomando límites cuando $\delta \to 0$, se obtiene:

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

■

Teorema 4. *Si $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función no decreciente y continua por la derecha, existe una única medida μ_F, definida sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que:*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a),$$

para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Además, $\mu_F(\{x\}) = F(x) - F(x-)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Sea $\mathcal{A}$ la familia formada por los conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos en $\mathcal{I}$, ajenos por parejas.

Para cada $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{A}$, definamos $\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu_F(I_j)$.

Por los lemas anteriores, μ_F está bien definida.

Obviamente $\nu_F(I) = \mu_F(I)$ para cualquier $I \in \mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y la función $\mu_F : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ es no negativa y finitamente aditiva.

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, A_i es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas. Además, como $A \in \mathcal{A}$, A también es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas.

Sean $A = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $A_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$. Entonces:

$$\bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)} = A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}$$

Tenemos dos colecciones de intervalos, por un lado la familia $\left\{I_{(i,k)} : i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ y por el otro la familia $\left\{I^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}\right\}$. Tanto los intervalos de la primera familia como los de la segunda son ajenos por parejas y A es igual tanto a la unión de los intervalos de la primera familia como de la segunda. Por otra parte, una pareja de intervalos, uno de la primera familia y otro de la segunda, podrían no ser ajenos.

La idea ahora es partir cada intervalo $I^{(j)}$ en intervalos ajenos por parejas, utilizando los intervalos $I_{(i,k)}$. Para esto, definamos, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$:

$$I_{(i,k)}^{(j)} = I_{(i,k)} \cap I^{(j)}$$

Entonces, los intervalos de la familia $\left\{I_{(i,k)}^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}, i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ son ajenos por parejas y:

$I_{(i,k)} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$.

$I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Además, por el teorema 3, se tiene:

$\mu_F\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Así que:

$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m} \mu_F\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_F\left(I_{(i,k)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$

Además, como μ_F es finitamente aditiva y $A \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_F(A_i)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu_F(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$$

Por lo tanto, $\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(A_i)$, así que μ_F es σ-aditiva y entonces puede ser extendida a una medida μ_F definida sobre la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, es decir, los borelianos de $\mathbb{R}$.

Para la última parte, sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{n}, x\right]$$

Así que:

$$\mu_F(\{x\}) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \mu_F\left(\left(x - \tfrac{1}{n}, x\right]\right) = F(x) - \lim_{n \rightsquigarrow \infty} F\left(x - \tfrac{1}{n}\right) = F(x) - F(x-)$$

■

Ahora mostraremos que cualquier medida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, se puede generar a partir de una función no decreciente continua por la derecha.

Teorema 5. *Dada cualquier medida μ sobre los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, tal que los intervalos acotados tienen medida finita, existe una función no decreciente y continua por la derecha $F_\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\mu((a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$. Además, si F_1 y F_2 son dos funciones con esta propiedad, entonces $F_1 - F_2$ es constante.*

Demostración

Definamos la función $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F_\mu(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu((0, x]) & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

F_μ es no decreciente y continua por la derecha y se tiene $\mu((a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$ para cualquier pareja de números reales, a y b, tales que $a < b$.

Si $F_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $F_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son dos funciones que satisfacen el enunciado del teorema, se tiene $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$ para cualquier pareja de números reales a y b tales que $a < b$, lo cual implica que $(F_1 - F_2)(b) = (F_1 - F_2)(a)$; es decir, $F_1 - F_2$ es constante.

■

Propiedades de las funciones medibles

Las funciones medibles $f : (\mathbb{F}, \Im) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ tienen las siguientes propiedades:

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces:

a) Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, las funciones $\min\{f_1, \dots, f_n\}$ y $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ son medibles.

b) Las funciones $\inf\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\sup\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ son medibles.

c) Las funciones $\liminf_{n\to\infty} f_n$ y $\limsup_{n\to\infty} f_n$ son medibles.

d) Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para cualquier $x \in \mathbb{F}$ (donde ∞ y $-\infty$ también se incluyen como posibles límites), entonces la función $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medible.

2. Si f es una función medible, entonces $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = \max\{-f, 0\}$ son medibles.

3. Si f y g son funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f+c$, cf y fg son medibles.

4. Si f y g son funciones medibles y $h : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ en todos los puntos $x \in \mathbb{F}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ esté definida y h es constante en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{E}$ para los cuales $f(x)+g(x)$ no esté definida, entonces h es medible.

5. Si $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ es un espacio de medida completo, f una función medible y $g : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $g = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces g es medible.

6. Si f es una función medible que toma únicamente valores en $\mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $h \circ f$ es medible.

Propiedades de la integral con respecto a una medida

1. Si f y g son dos funciones medibles no negativas, entonces:

a) Si $f \leq g$, entonces $\int_{\mathbb{F}} f d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} g d\mu$.

b) Si $f \leq g$ sobre un conjunto $F \in \Im$, entonces $\int_F f d\mu \leq \int_F g d\mu$.

2. Sea f una función medible no negativa y $F \in \Im$ tal que $\mu(E) = 0$; entonces:

$$\int_F f d\mu = 0$$

3. Teorema de la convergencia monótona: Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} \text{lím}_{n \to \infty} f_n d\mu = \text{lím}_{n \to \infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu$$

4. Si f y g son dos funciones medibles no negativas, entonces:

a) $\int_{\mathbb{F}} [af + bg] \, d\mu = a \int_{\mathbb{F}} f d\mu + b \int_{\mathbb{F}} g d\mu$ para cualesquiera números reales a y b no negativos.

b) $\int_{\mathbb{F}} f d\mu = 0$ si y sólo si $\mu \{y \in \mathbb{F} : f(y) > 0\} = 0$.

5. Sea f una función medible no negativa. Entonces, la función $m : \Im \to \overline{\mathbb{R}}$, definida por $m(F) = \int_F f d\mu$, es una medida.

6. Lema de Fatou: Sea $\{f_n\}_{n \in N}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} \text{lím inf}_{n \to \infty} f_n d\mu \leq \text{lím inf}_{n \to \infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu$$

7. Si f es una función medible no negativa tal que $\int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$, entonces $\mu \{y \in \mathbb{F} : f(y) = \infty\} = 0$.

8. Una función medible f es integrable sobre un conjunto $F \in \Im$ si y sólo si f^+ y f^- son integrables sobre F.

9. Si f y g dos funciones medibles e integrables sobre un conjunto $F \in \Im$, entonces:

a) Para cualquier número real c, la función cf es integrable sobre F y $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$.

b) Si $f \leq g$ sobre F, entonces $\int_F f d\mu \leq \int_F g d\mu$.

c) $\left|\int_F f d\mu\right| \leq \int_F |f| \, d\mu$

10. Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones medibles e integrables sobre un conjunto medible F, $a_1, \ldots, a_n$ números reales y $h : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible tal que $h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ en todos los puntos $x \in F$ para los cuales $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ esté definida, entonces h es integrable sobre F y:

$$\int_F h d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_F f_k d\mu$$

11. Sea g una función medibles e integrable tal que $\int_F g d\mu \geq 0$ para cualquier $F \in \Im$, entonces:

$$\mu \{x \in \mathbb{F} : g(x) < 0\} = 0$$

12. Sean f y g dos funciones medibles e integrables. Entonces:

a) Si $\int_F f d\mu \leq \int_F g d\mu$ para cualquier $F \in \Im$, entonces:

$$\mu \{x \in \mathbb{F} : f(x) > g(x)\} = 0$$

b) Si $\int_F f d\mu = \int_F g d\mu$ para cualquier $F \in \Im$, entonces:

$$\mu \{x \in \mathbb{F} : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

13. Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto $F \in \Im$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y f una función medible tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, donde este límite existe, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_F |f_n - f| \, d\mu = 0$$

14. Teorema de la convergencia dominada: Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto medible F, $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y f una función medible tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, donde este límite existe; entonces, f es integrable sobre F y:

$$\int_F f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_F f_n d\mu$$